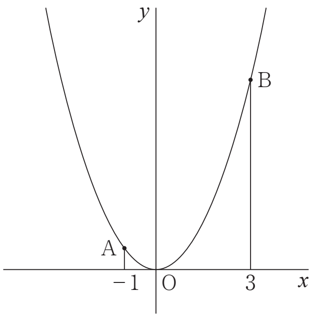
第16講　関数と図形②

Step 1

1　関数 $y = x^2$ のグラフ上に2点A，Bがあり，点Aの x 座標は -1，点Bの x 座標は3である。このとき，次の各問いに答えなさい。



問1　点Aの y 座標を求めなさい。

問2　この関数において x の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域を求めなさい。

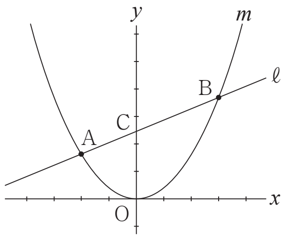
問3　原点をOとするとき，△OABの面積を求めなさい。

問4　原点Oから直線ABに下ろした垂線と直線ABとの交点をPとするとき，線分OPの長さを求めなさい。

【沖縄県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　右図において，m は $y = ax^2$（a は正の定数）のグラフを表す。A，B は m 上の点であって，A，B の x 座標はそれぞれ－2，3である。ℓ は，2点A，B を通る直線である。C は，ℓ と y 軸との交点である。



①　C の y 座標を a を用いて表しなさい。

②　O と A，O と B とをそれぞれ結んでできる△AOB の面積が $6\,\text{cm}^2$ であるときの直線 ℓ の式を求めなさい。求め方も書くこと。ただし，座標軸の1目もりの長さは1cm であるとする。

【大阪府】

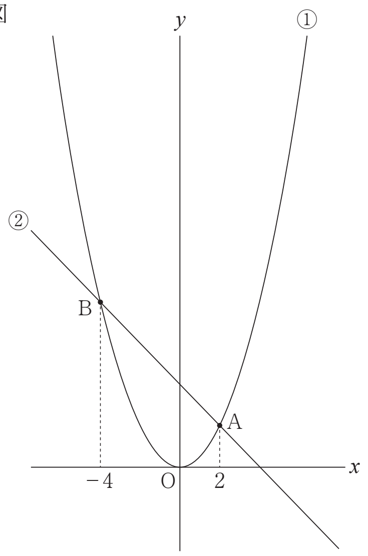
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　2

3　図のように，関数 $y = ax^2$……①と $y = -x + b$……②のグラフが，2 点 A，B で交わっている。2 点 A，B の x 座標はそれぞれ，2，-4 である。

次の問 1，問 2 に答えなさい。

図



問 1　次の [ア] ～ [ク] にあてはまる数を答えなさい。

点 A は，①のグラフ上にあるので，

座標は(2，[ア] a)と表すことができる。

同様に，点 B も①のグラフ上にあるので，

座標は(-4，[イ] a)と表すことができる。

さらに，点 A は②のグラフ上の点であるから，

[ア] a = [ウ] + b……③が成り立つ。

同様に，点 B も②のグラフ上の点であるから，

[イ] a = [エ] + b……④が成り立つ。

③と④から，a，b の値を求めると，a = [オ]，b = [カ] となる。

したがって，関数①の x の変域が $-4 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を求めると，

[キ] $\leqq y \leqq$ [ク] となる。

問 2　△OAB と△OAP の面積が等しくなるような点 P を関数①のグラフ上にとる。ただし，点 P は点 B とは異なる点である。

次の 1，2 に答えなさい。

1．点 P の位置は，どのように決めればよいか，「平行」ということばを用いて説明しなさい。

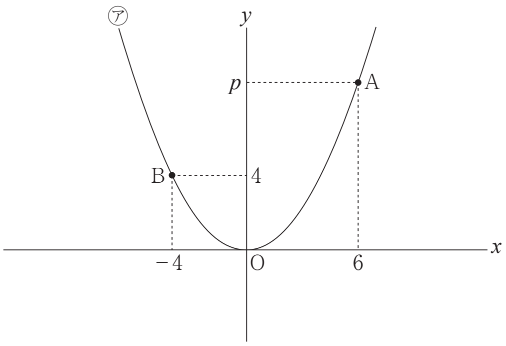
2．直線 AB と y 軸の交点を Q とし，直線 BP と y 軸との交点を R とする。△OAQ と△BQR の面積の比を，最も簡単な整数の比で答えなさい。

【島根県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

4　右の図のように，関数 $y = ax^2$……㋐のグラフ上に2点A，Bがあり，点Aの座標が$(6,\ p)$，点Bの座標が$(-4,\ 4)$である。

このとき，あとの各問いに答えなさい。



(1)　a，pの値を求めなさい。

(2)　関数㋐について，xの値が-4から0まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(3)　2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

(4)　原点をOとし，直線ABがx軸と交わる点をCとするとき，次の各問いに答えなさい。

①　△OBCを，x軸を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。
ただし，円周率はπとし，座標の1目もりは1cmとする。

②　原点Oを通り，直線ABに平行な直線が，関数㋐のグラフと交わる点をDとする。直線OD上の$x < 0$となる部分に点Eをとり，四角形ABEOをつくる。四角形ABEOの面積と△ACDの面積が等しくなるとき，点Eの座標を求めなさい。
ただし，点Dは原点Oと異なる点とする。

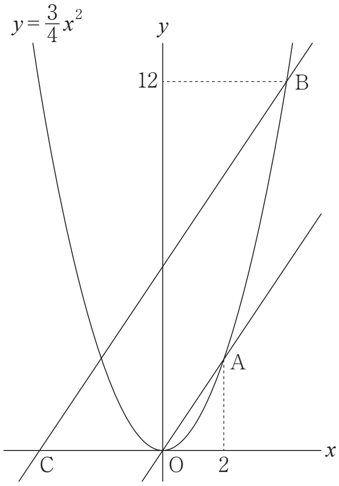
【三重県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

5　右の図のように，関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ のグラフ上に2点A，Bがある。Aの x 座標は2で，Bの y 座標は12であり，Bの x 座標は正である。また，点Oは原点であり，点Cは，Bを通り，直線OAに平行な直線と x 軸との交点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。



(1)　点Aの y 座標を求めなさい。

(2)　点Bの x 座標を求めなさい。

(3)　直線BCの式を求めなさい。

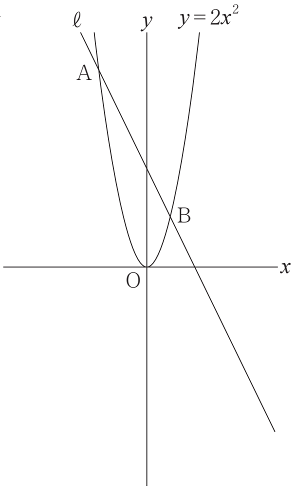
(4)　線分BC上に2点B，Cとは異なる点Pをとる。△OPCの面積が△OABの面積の $\dfrac{1}{2}$ となるときのPの座標を求めなさい。

【熊本県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

6 右の図１のように，関数 $y = 2x^2$ のグラフと直線 ℓ が２点 A，B で交わっている。２点 A，B の x 座標が，それぞれ－２，１であるとき，次の⑴，⑵の問いに答えなさい。

図１



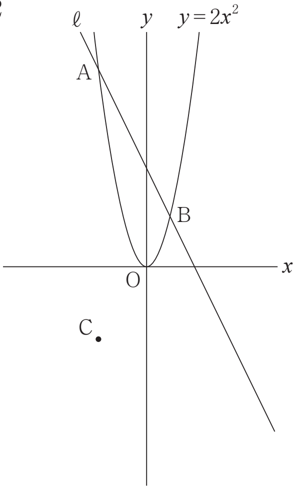
⑴ 直線 ℓ の式を求めなさい。

⑵ 右の図２のように，図１において点 C（－２，－３）をとる。y 軸を対称の軸として，点 C を対称移動した点を D とし，線分 CD を１辺とする正方形 CDEF を，点 E，F の y 座標が負となるようにかく。

この正方形 CDEF の周上に点 P をとり，点 P と２点 A，B を結んで，△ABP をつくる。

△ABP の面積が，原点 O と２点 A，B を結んでできる△ABO の面積の３倍になるような点 P は２つある。この２つの点の座標を，それぞれ求めなさい。

図２



【千葉県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第16講　関数と図形②

Step 1

1　問1.（y =）1　問2. $0 \leqq y \leqq 9$　問3. 6　問4.（OP =）$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

≪解説≫

問1. $y = x^2$ に $x = -1$ を代入して，点Aの y 座標は，$y = (-1)^2 = 1$

問2. $x = 0$ のとき，$y = 0$ で最小値をとり，$x = 3$ のとき，$y = 3^2 = 9$ で最大値をとる。よって，$0 \leqq y \leqq 9$

問3. 問1，問2より，A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 9)$　直線ABの式は，傾きが，$\dfrac{9-1}{3-(-1)} = 2$ なので，$y = 2x + b$ とおき，$(-1,\ 1)$ を代入して，$1 = 2 \times (-1) + b$ より，$b = 3$ となり，$y = 2x + 3$　よって，直線ABの切片をCとすると，$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 3 \times 3 = 6$

問4. $AB = \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + (9-1)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$　よって，△OABの面積について，$\dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times OP = 6$ が成り立ち，$OP = \dfrac{6}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2　① $6a$　② $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{12}{5}$

≪解説≫

① $y = ax^2$ に，$x = -2$，$x = 3$ をそれぞれ代入すると，$y = a \times (-2)^2 = 4a$，$y = a \times 3^2 = 9a$ より，A$(-2,\ 4a)$，B$(3,\ 9a)$ となる。これより，直線ABの傾きは，$\dfrac{9a - 4a}{3-(-2)} = a$ だから，Cの y 座標を c とすると，直線 ℓ の式は，$y = ax + c$ と表せる。この式に，点Aの座標の値を代入して，$4a = a \times (-2) + c$ より，$c = 6a$

② $\triangle AOB = \triangle AOC + \triangle BOC = \dfrac{1}{2} \times 6a \times 2 + \dfrac{1}{2} \times 6a \times 3 = 15a$　よって，$15a = 6$ が成り立つので，$a = \dfrac{2}{5}$　①より，ABの傾きは $a = \dfrac{2}{5}$，切片は $6a = \dfrac{12}{5}$ だから，直線 ℓ の式は，$y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{12}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製·転載を禁止します。

Step 2

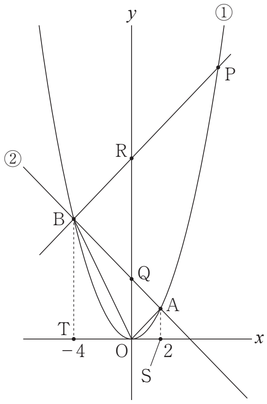
3 問1. ア. 4　イ. 16　ウ. -2　エ. 4　オ. $\frac{1}{2}$　カ. 4　キ. 0　ク. 8

問2. 1. (説明) (例) 点Bを通り，OAに平行な直線をひく。この直線と①のグラフとの交点のうち，Bでない方をPとする。2. (△OAQ：△BQR＝) 1：4

≪解説≫

問1. 点Aのy座標は，$a \times 2^2 = 4a$　また，点Bのy座標は，$a \times (-4)^2 = 16a$　2点A，Bの座標を②のグラフにそれぞれ代入すると，$\begin{cases} 4a = -2 + b \cdots\cdots ③ \\ 16a = 4 + b \cdots\cdots ④ \end{cases}$　これを解くと，$a = \frac{1}{2}$，$b = 4$　関数①の式が$y = \frac{1}{2}x^2$だから，xの変域が$-4 \leqq x \leqq 2$のとき，yの値は，$x = 0$で最小値$y = 0$，$x = -4$で最大値，$y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$　よって，yの変域は，$0 \leqq y \leqq 8$

問2. 1. △OABと△OAPは，ともにOAを底辺とすると，OA∥BPのとき，高さが等しくなり，面積も等しくなる。2. 右図のようにS，Tをとると，AQ：BQ＝SO：TO＝2：4＝1：2　OA∥BRより，△OAQ∽△RBQで，相似比は，AQ：BQ＝1：2なので，△OAQ：△BQR＝$1^2 : 2^2$＝1：4



4 (1) $(a =)\ \frac{1}{4}$　$(p =)\ 9$　(2) -1　(3) $y = \frac{1}{2}x + 6$

(4) ① 64π (cm^3)　② E $(-8,\ -4)$

≪解説≫

(1) B $(-4,\ 4)$は，$y = ax^2$上の点だから，$x = -4$，$y = 4$を代入して，$4 = a \times (-4)^2$より，$a = \frac{1}{4}$　よって，A $(6,\ p)$は，$y = \frac{1}{4}x^2$上の点だから，$p = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$

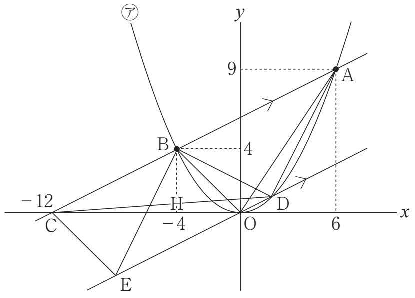
(2) $y = \frac{1}{4}x^2$について，$x = -4$のとき$y = 4$，$x = 0$のとき$y = 0$だから，求める変化の割合は，$\frac{0 - 4}{0 - (-4)} = -1$

(3) A $(6,\ 9)$，B $(-4,\ 4)$より，直線ABの傾きは，$\frac{9 - 4}{6 - (-4)} = \frac{1}{2}$　よって，直線AB

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

の式は，$y = \frac{1}{2}x + b$ と表せる。B $(-4,\ 4)$ を通ることから，$4 = \frac{1}{2} \times (-4) + b$ より，$b = 6$　よって，直線ABの式は，$y = \frac{1}{2}x + 6$

(4) ① $y = \frac{1}{2}x + 6$ に，$y = 0$ を代入して，$0 = \frac{1}{2}x + 6$ より，$x = -12$ だから，C $(-12,\ 0)$　また，点Bから x 軸に垂線を引き，x 軸との交点をHとすると，H $(-4,\ 0)$ となる。△OBCを，x 軸を軸として1回転させてできる立体は，半径BHの円が底面で，高さがCHとOHである2つの円すいを合わせたものになる。$BH = 4$，$CH = -4-(-12) = 8$，$OH = 4$ より，求める体積は，$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 8 + \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 4 = 64\pi\ (cm^3)$　② 上図で，AC∥DEより，△ACD＝△ACO＝△ABO＋△CBO　また，四角形ABEO＝△ABO＋△EBOだから，四角形ABEO＝△ACDのとき，△CBO＝△EBOとなる。このとき，CE∥BOだから，四角形BCEOは平行四辺形。これより，CE＝BO，CE∥BOとなり，OはBを x 軸方向に $+4$，y 軸方向に -4 移動した点だから，EもCを同様に移動した点となる。よって，C $(-12,\ 0)$ より，E $(-8,\ -4)$



Step　3

5　(1) 3　(2) 4　(3) $y = \frac{3}{2}x + 6$　(4) $\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$

≪解説≫

(1) $y = \frac{3}{4}x^2$ に $x = 2$ を代入して，$y = \frac{3}{4} \times 2^2 = 3$

(2) $y = \frac{3}{4}x^2$ に $y = 12$ を代入して，$12 = \frac{3}{4}x^2$ より，$3x^2 = 48$ となり，$x^2 = 16$　$x > 0$ より，$x = 4$

(3) 点A $(2,\ 3)$ より，直線OAの傾きは $\frac{3}{2}$。直線BCの式を $y = \frac{3}{2}x + b$ とおき，点Bの座標を代入すると，$12 = \frac{3}{2} \times 4 + b$ より，$b = 6$　よって，$y = \frac{3}{2}x + 6$

(4) OA∥BCより，△OAB＝△OCAなので，△OPC＝$\frac{1}{2}$△OAB＝$\frac{1}{2}$△OCA　よって，点Pの y 座標は，点Aの y 座標3の $\frac{1}{2}$ となればよく，$y = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$　$y = \frac{3}{2}x + 6$ に $y = \frac{3}{2}$ を代入して，$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}x + 6$ より，$x = -3$ となるから，P$\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$

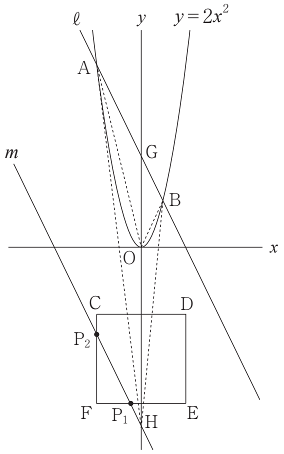
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

6 (1) $y=-2x+4$　(2) $\left(-\dfrac{1}{2},\ -7\right)$, $(-2,\ -4)$

≪解説≫

(1) $y=2x^2$ に $x=-2$ を代入して，$y=2\times(-2)^2=8$ より，A $(-2,\ 8)$　$y=2x^2$ に $x=1$ を代入して，$y=2\times1^2=2$ より，B $(1,\ 2)$　これより，直線 ℓ の傾きは，$\dfrac{2-8}{1-(-2)}=-2$ なので，求める式を $y=-2x+b$ とおいて点Bの座標を代入すると，$2=-2\times1+b$ となり，$b=4$　よって，$y=-2x+4$

(2) 正方形CDEFは右図のようになり，D $(2,\ -3)$，CD $=2-(-2)=4$ より，E $(2,\ -7)$，F $(-2,\ -7)$　さらに，G $(0,\ 4)$ とおくと，GO $=4$ で，$\triangle$ABO $=\triangle$GAO $+\triangle$GBO $=\dfrac{1}{2}\times4\times2+\dfrac{1}{2}\times4\times1=6$　ここで，y 軸上に，GH $=4\times3=12$ となる点H $(0,\ -8)$ をとると，$\triangle$ABH $=\triangle$GAH $+\triangle$GBH $=\dfrac{1}{2}\times12\times2+\dfrac{1}{2}\times12\times1=18$ となり，$\triangle$ABH の面積は $\triangle$ABO の面積の3倍。このとき，点Hを通り ℓ に平行な直線を m とすると，その式は $y=-2x-8$ で，直線 m 上に点Pをとると，$\triangle$ABP $=\triangle$ABH なので，$\triangle$ABP の面積も $\triangle$ABO の面積の3倍になる。よって，求める点Pは，正方形CDEFの周と直線 m の交点なので，上図のように，FE，CF との交点をそれぞれ P_1，P_2 とする。直線 m の式に $y=-7$ を代入して，$-7=-2x-8$ より，$x=-\dfrac{1}{2}$ となり，$P_1\left(-\dfrac{1}{2},\ -7\right)$　また，直線 m の式に $x=-2$ を代入して，$y=-2\times(-2)-8=-4$ より，$P_2\,(-2,\ -4)$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。